semrm
Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

ORGANIZA

XXXIII Olimpiada Matemática Región de Murcia

Fase comarcal:
Sábado, 25 de marzo de 2023
En CARTAGENA, LORCA y MURCIA

Fase regional:
Sábado, 6 de mayo de 2023
En LORCA

COLABORAN

Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia; Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales, Centro de Estudios para la Memoria Educativa (CEME) y Facultad de Educación de la Universidad de Murcia; Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Cartagena; Consorcio del Campus Universitario de Lorca; Centros Educativos de la Región de Murcia; Ayuntamiento de Murcia, Ayuntamiento de Cartagena y Ayuntamiento de Lorca

PATROCINAN

Universidad de Murcia · Olimpiadas Científicas de la Región de Murcia · Ayuntamiento Cartagena · Ayuntamiento de Lorca · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena · Ayuntamiento de Murcia · f SéNeCa(+) Agencia de Ciencia y Tecnología Región de Murcia

Acción financiada por la Fundación Séneca, Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia con cargo al Programa Regional de Cultura Científica e Innovadora 2022

Diseño cartel: Silvia Domínguez Sánchez

FASE REGIONAL

PROBLEMAS PROPUESTOS Y SOLUCIONES

SOLUCIONES 6.º DE PRIMARIA

PROBLEMA 1

Apartado A

Sabemos que 2 kg de azúcar y una pastilla de chocolate cuestan 7 euros. Si a 13 euros le restamos 7 euros, nos dará lo que cuestan 2 pastillas de chocolate.

2 pastillas de chocolate cuesta 5 €
1 pastilla de chocolate cuesta 5 **:** 2 = 2,50 €

Si a 7 € le restamos lo que cuesta 1 pastilla de chocolate, nos dará lo que cuestan 2 kg de azúcar:

2 kg de azúcar cuestan 7 – 2,50 = 4,50
1 kg de azúcar cuesta 4,50 **:** 2 = 2,25 €

Apartado B

Para buscar la constante mágica, tenemos en cuenta que en los dieciséis cuadrados están los números del 1 al 16, cuya suma es 136. Pero como las cuatro filas/columnas suman lo mismo, esta suma será 136 **:** 4 = 34. A partir de ahí, vamos completando filas y columnas.

<u>Si no hemos sabido hallar así la constante mágica, otra manera de buscar la solución</u>:

Una vez colocados los números correspondientes en las casillas que se indican en la tabla anterior, tendremos que elegir el número adecuado para una de las casillas vacías, que forme con otras tres, que tienen números, una fila, una columna o una diagonal. Por ejemplo, la casilla A2.

Los números que nos quedan por colocar son: 1, 3, 4, 5, 12, 13, 14 y 15.

Colocamos el 1 en la casilla A2. En este caso el número mágico sería el 30. No es un número apropiado, ya que para completar la columna B tendríamos que utilizar el número 10 en la casilla B4 para que el número mágico fuese 30 y el 10 ya se ha utilizado en la casilla C2.

Probamos a colocar en la casilla A2 el número 3. De manera similar al razonamiento anterior, el número mágico sería 32 y tendríamos que completar la fila tercera con el 10, que ya está colocado.

Probamos a colocar en la casilla A2 el número 4. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, el número mágico sería 33, y tendríamos que completar la fila tercera con el 11, que ya está colocado.

A continuación, colocamos el 5 en la casilla A2. Obtenemos como número mágico 34. A partir de ahí, vamos completando filas y columnas.

	A	B	C	D
1	16	2	3	13
2	5	11	10	8
3	9	7	6	12
4	4	14	15	1

PROBLEMA 2

Apartado A

a) 5 y 210; 10 y 105; 15 y 70; 35 y 30.

b) Descomponemos el 210 en factores primos, $210 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$. Los números que buscamos tienen que tener como factor común el 5, ya que es el mayor divisor común de esos números. Y en el producto de ambos números no pueden aparecer otros factores que: 5, 5, 2, 3, 7. *(En realidad, si tenemos en cuenta que el producto de dos números es el producto de su m.c.m. por su m.c.d., el producto de ambos números es exactamente $5\cdot(5\cdot2\cdot3\cdot7)$. Pero el problema también se puede resolver sin tener en cuenta esta propiedad).*

Además, el 5 aparece exactamente una vez en la descomposición de cada uno de los dos números (no pueden tener el 5 elevado a ninguna potencia diferente de 1).

Y el resto de factores sabemos que son el 2, el 3 y el 7, que han de aparecer una vez y en uno solo de los dos números que buscamos.

Apartado B

Si en 2 horas los alumnos tenían que resolver 50 preguntas, dedican a cada pregunta

$$2 : 50 = 0{,}04 \text{ horas}$$

Como han de disponer de un 25 % más de tiempo, ahora podrán utilizar para cada pregunta:

$$0{,}04 \times 1{,}25 = 0{,}05 \text{ horas}$$

Si el tiempo disponible es de 2 horas, el número de preguntas que se pueden poner es:

$$2 : 0{,}05 = 40 \text{ preguntas.}$$

Otro modo:
Tienen 2/50 horas por pregunta. Para tener un 25 % de tiempo más, han de disponer de 2/50 x 125/100 = 250/5000 = 1/20 horas por pregunta. Como el número de horas sigue siendo 2, el número de preguntas ha de ser 2 **:** 1/20 = 40 preguntas.

También podríamos considerar el tiempo en minutos:
Si el número de preguntas es 50, a cada pregunta le corresponde

$$120 \text{ minutos} : 50 = 2{,}4 \text{ minutos.}$$

A este tiempo hay que sumarle un 25 %. El 25 % de 2,4 minutos es 0,6 minutos.
El nuevo tiempo asignado a cada pregunta es 2,4 + 0,6 = 3 minutos.
El número final de preguntas será 120 **:** 3 = 40 preguntas.

PROBLEMA 3

a) Sí. Ejemplo: 1,333… − 0,333… = 1 (si expresamos los números con infinitas cifras decimales en forma de fracción, basta elegir, por ejemplo, 4/3 − 1/3 =1).
b) Sí. Ejemplo: 0,005 x 0,02 = 0,0001 (basta que las últimas cifras decimales, al multiplicarlas den 10).

c) Sí. Ejemplo: 2,3333…x 0,428571428571… = 1 (basta buscar dos fracciones tales que, en forma decimal, tengan infinitas cifras decimales y sean una inversa de la otra, en este caso 7/3 y 3/7).
d) Sí. Ejemplo: 0,1 : 0,3 = 1:3 = 0,3333…

PROBLEMA 4

a) Sólo necesitamos hacer la pesada representada en la figura 1:
Si la balanza está equilibrada, quiere decir que el dado de 1 gramo es el falso.

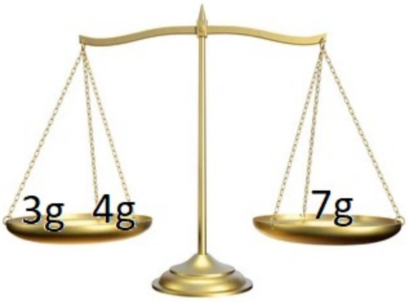


Fig. 1

b) Si el dado de 7 g es el falso, los restantes son verdaderos, luego al realizar la pesada de la figura 2, la balanza estará equilibrada y quedaría probado que el dado falso es el que debería pesar 7 g.

Fig.2

c) Necesitamos hacer dos pesadas: Como los dados de 1 g y de 7 g son verdaderos porque el falso es el de 3 g o el de 4 g (solo hay uno falso) para descubrir cuál es el falso se tienen que hacer dos pesadas, la de la figura 1 y la de la figura 2. Puede ocurrir:

i) Que de la primera pesada (fig 1) resulte que el dado de **7 g pese más que los de 3 g y 4 g juntos**, luego el dado de 3 g o el de 4 g pesa menos que el peso que tiene asignado (porque es falso).
Sabiendo esto, realizamos una segunda pesada igual a la representada en la figura 2, es decir, en un platillo ponemos los dados de 1 g y 3 g y en el otro, el dado de 4 g. Al pesarlos, pueden ocurrir dos situaciones:

- Que el dado de 4 g pese menos que el de 1 g y 3 g juntos, en cuyo caso el falso es de dado de 4 g.

- Que, por el contrario, el dado de 4 g pese más que los dados de 1 g y 3 g juntos, con lo cual, el dado falso es de 3 g, ya que partimos de que el dado de 1 g es verdadero.

ii) Que al hacer la primera pesada el dado de 7 g pesara menos que los dados de 3 g y 4 g juntos. Luego, uno de ellos pesará más de lo que debería pesar. De manera similar al caso anterior, descubriríamos cuál de los dos es el falso, realizando la pesada representada en la figura 2. Analizamos las dos opciones:

- Si el dado de 4 g pesa menos que los dados de 3 g y 1 g juntos, el falso es el dado de 3 g.
- En caso contrario, si el dado de 4 g pesa más que los otros dos juntos, el falso sería el dado de 4 g.

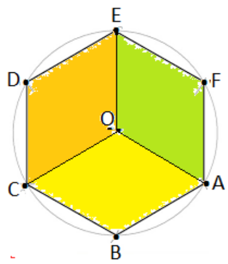
SOLUCIONES 2.º DE ESO

PROBLEMA 1

Apartado A

a) Al unir los cuatro puntos O, A, B y C obtenemos un rombo.

b) Se pueden formar otro dos rombos iguales al OABC.

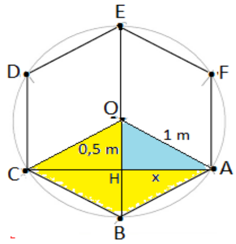


Al ser la distancia igual entre dos puntos consecutivos, OA = AB = BC = CO, el radio del círculo es igual al lado del rombo. Si marcamos otros tres puntos en la circunferencia a la misma distancia que están situados los puntos A, B y C y los unimos obtendremos un hexágono regular inscrito en el círculo. Uniendo el centro con E, este con F y F con A obtendríamos un segundo rombo y procediendo de manera similar, uniendo E con D y D con C, tendríamos el tercer rombo. Los dos rombos obtenidos son iguales al primero, ya que sus lados son iguales (son lados o radios de un hexágono regular) y además, tienen tres de sus vértices en la circunferencia y el cuarto en el centro de círculo.

c) Para hallar la superficie del rombo tenemos que conocer la medida de sus diagonales o la altura de los dos triángulos iguales que lo forman. Optamos por las diagonales:

La diagonal menor es OB, un radio del círculo. Si la longitud de la circunferencia mide 628 cm, el radio es:

$$R = 628/6{,}28 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}.$$



Sobre el rombo OABC hemos trazado las dos diagonales: OB = radio = 1 m

y AC. Para hallar AC, tomamos uno de los cuatro triángulos rectángulos en que ha quedado divido el rombo al trazar las diagonales, por ejemplo, OHA.

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$1^2 – 0,5^2 = x^2$, $x = \sqrt{0,75} = 0,86$ m

Luego, AC = 2 x 0,86 = 1,72 m

Área del rombo = (1,72 x 1) / 2 = 0,86 m^2

Apartado B

4n/5 preguntas. Es decir, hay que poner un 20 % menos preguntas.

PROBLEMA 2

Apartado A

a) Hemos considerado que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es, aproximadamente, del 50 %. En la siguiente tabla vemos cómo se puede ir produciendo el número de nacimientos, por año:

AÑOS	NÚMERO DE NIÑOS	NÚMERO DE NIÑAS
Primer año	1024	1024
Segundo año	512	512
Tercer año	256	256
Cuarto año	128	128
Quinto año	64	64
Sexto año	32	32
Séptimo año	16	16
Octavo año	8	8
Noveno año	4	4

La respuesta correcta es la primera. Vemos cómo, desde el principio, el número de hijos varones y el de hijas se va manteniendo igualado. Al cabo de 9 años habrán nacido, en teoría, 1024+512+256+128+64+32+16+8+4= 2044 niños y la misma cantidad de niñas.

b) No importa cuántos hijos tiene cada pareja, ni cuál sea la razón por la que cada una de ellas deja de tener niños, sea en función del sexo o de otras circunstancias. Lo cierto es que si, en cada nacimiento, la probabilidad de que nazca un niño y la de que nazca una niña son prácticamente iguales[1], la cantidad de hombres y de mujeres en una población lo bastante grande se va a mantener equilibrada[2].

Apartado B

Para buscar la constante mágica, tenemos en cuenta que en los dieciséis cuadrados están los números del 1 al 16, cuya suma es 136. Pero como las cuatro filas/columnas suman lo mismo, esta suma será 136 **:** 4 = 34. A partir de ahí, vamos completando filas y columnas.

<u>Si no hemos sabido hallar así la constante mágica, otra manera de buscar la solución</u>:

Una vez colocados los números correspondientes en las casillas que se indican en la tabla anterior, tendremos que elegir el número adecuado para una de las casillas vacías, que forme con otras tres, que tienen números, una fila, una columna o una diagonal. Por ejemplo, la casilla A2.

Los números que nos quedan por colocar son: 1, 3, 4, 5, 12, 13, 14 y 15.

Colocamos el 1 en la casilla A2. En este caso el número mágico sería el 30. No es un número apropiado, ya que para completar la columna B tendríamos que utilizar el número 10 en la casilla B4 para que el número mágico fuese 30 y el 10 ya se ha utilizado en la casilla C2.

Probamos a colocar en la casilla A2 el número 3. De manera similar al razonamiento anterior, el número mágico sería 32 y tendríamos que completar la fila tercera con el 10, que ya está colocado.

Probamos a colocar en la casilla A2 el número 4. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, el número mágico sería 33, y tendríamos que completar la fila tercera con el 11, que ya está colocado.

A continuación, colocamos el 5 en la casilla A2. Obtenemos como número mágico 34. A partir de ahí, vamos completando filas y columnas.

Otra manera de resolver el cuadrado mágico:

La suma de los números de la fila 2 es igual a la suma de los de la fila 3, luego 29+A2=22+D3, por lo que D3=7+A2.

De los números que quedan por colocar, solo el 5 y el 12 cumplen esa condición. Por tanto, en D3 pondremos el 12 y en A2 el 5. Entonces ya sabemos la constante mágica y podemos completar con el 1 la casilla D4, con el 14 la B4, con el 4 la A4 y con el 13 la D y finalmente con el 3 la C1**.**

---

1 En realidad nacen más niños que niñas, pero la diferencia es pequeña y en el enunciado se ha decidido ignorarla y considerar que tener un hijo de uno u otro sexo es igualmente probable.

2 Cuando se producen grandes desequilibrios ligados a la preferencia por hijos de un determinado sexo, no es debido a los nacimientos (siempre que no se intervenga artificialmente para elegir el sexo del bebé), sino a otras circunstancias o actuaciones posteriores.

PROBLEMA 3

a) Sí. Ejemplo: 1,333… − 0,333… = 1 (si expresamos los números con infinitas cifras decimales en forma de fracción, basta elegir, por ejemplo, 4/3 − 1/3 =1).

b) Sí. Ejemplo: 0,005 x 0,02 = 0,0001 (basta que las últimas cifras decimales, al multiplicarlas den 10).

c) Sí. Ejemplo: 2,3333…x 0,428571428571… = 1 (basta buscar dos fracciones tales que, en forma decimal, tengan infinitas cifras decimales y sean una inversa de la otra, en este caso 7/3 y 3/7).

d) Sí. Ejemplo: 0,1 : 0,3 = 1:3 = 0,3333…

e) Sí. Ejemplo: 0,3333…+0,6666…=0,9999…=1 (1/3+2/3=1).

PROBLEMA 4

a) Entre otras muchas posibilidades hemos elegido las siguientes:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	2	25	26	27	28
29	30	31				

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	1	12	13	14
1	16	17	1	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	1	12	13	14
15	1	17	18	19	20	21
22	2	24	25	26	27	28
29	30	31				

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
1	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
2	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	2	26	27	28
29	30	31				

b) Si sumamos las casillas que sumábamos en el cuadrado anterior, ahora la suma no es 52, sino 56. Cada número de la nueva cuadrícula es igual al que está en una posición equivalente, en la cuadrícula anterior, más 1. Por tanto, la cuadrícula nueva tendrá las mismas propiedades y la constante que resulta de sumar las cuatro esquinas, etc. será la misma que antes, más 4.

c) En cualquier cuadrado elegido de ese modo en un calendario, habrá en la primera fila 7 números consecutivos y en la fila inmediata inferior cada número será el de arriba pero sumándole 7. Y lo mismo con cada una de las otras dos filas.

Si escribimos el número 2 como 1+1, el 3 como 1+2, etc., el número de la esquina superior izquierda del cuadrado que hayamos seleccionado lo escribiremos como *1+n*; y el cuadrado será de esta forma:

		n+1		**n+2**		**n+3**		**n+4**	
		n+8		**n+9**		**n+10**		**n+11**	
		n+15		**n+16**		**n+17**		**n+24**	
		n+22		**n+23**		**n+24**		**n+25**	

Y buscar cuaternas que sumen lo mismo que las cuatro casillas de las esquinas es equivalente a buscarlas en el cuadrado:

		1	**2**	**3**	**4**	
		8	**9**	**10**	**11**	
		15	**16**	**17**	**18**	
		22	**23**	**24**	**25**	

Solo que en el anterior, dependiendo de qué número sea *n*, la suma de los números de las cuatro casillas de las esquinas, o de las cuatro casillas centrales, etc., en lugar de 52, será

$$(n+1) + (n+4) + (n+22) + (n+25\ ) = 52 + 4n$$

En el cuadrado del apartado a), n = 0 y en el del apartado b), n = 1.